

# **Cours n°14**

## **Les membranes**

<b>1</b>	<b>LES MEMBRANES.....</b>	<b>3</b>
1.1	DOMAINE D'UTILISATION.....	3
1.2	EQUILIBRE DE DEUX CORDES.....	3
1.3	EQUILIBRE DE MEMBRANE.....	4
1.3.1	<i>Equilibre de surfaces cylindriques.....</i>	<i>6</i>
1.3.2	<i>Equilibre de surfaces de révolution soumise à un système de charge de révolution.....</i>	<i>6</i>
<b>2</b>	<b>LES STRUCTURES TEXTILES.....</b>	<b>9</b>
2.1	LIBRES OU SIMPLES.....	10
2.2	CABLES DE VALLEE.....	10
2.3	ARCEAUX RIGIDES OU BORDURES RIGIDES.....	11
2.4	SUPPORTS RIGIDES OU POINT HAUT (MATS).....	11
2.5	SURFACES DE REVOLUTION.....	11
2.6	PARAPLUIES.....	12
2.7	CARACTERISTIQUES DES TEXTILES PVC.....	12
<b>3</b>	<b>LES STRUCTURES GONFLABLES.....</b>	<b>15</b>
3.1	EQUILIBRE D'UNE BULLE DE SAVON.....	15
3.2	EQUILIBRE DES ENVELOPPES SOUMISES A UNE PRESSION INTERNE.....	16

3.3	CHARGES APPLIQUEES SUR LES ENVELOPPES GONFLABLES .....	18
3.4	MEMBRANES DOUBLES .....	19
4	LES DEVELOPPEMENTS D'AVENIR .....	23

# 1 LES MEMBRANES

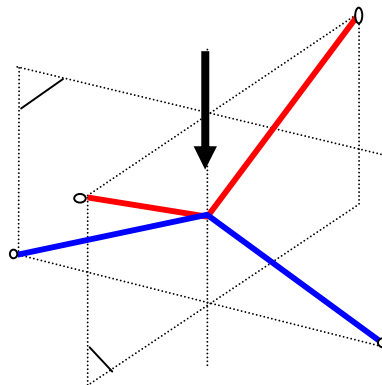
## 1.1 DOMAINE D'UTILISATION

Contrairement aux coques qui peuvent supporter des compressions et des flexions, les membranes sont constituées de surfaces à double courbure travaillant uniquement à la traction.

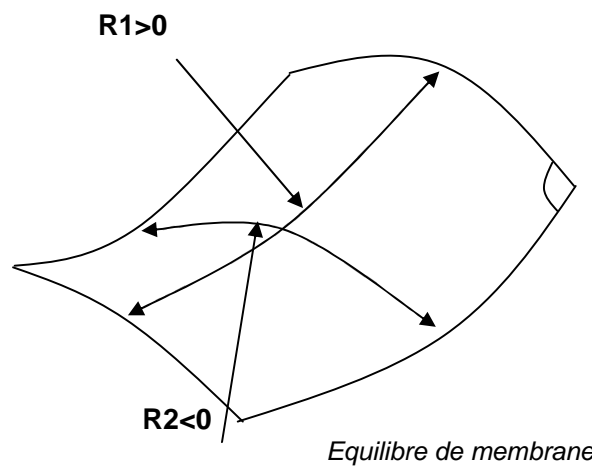
Elles peuvent être réalisées en béton de faible épaisseur, en câbles d'acier, croisés selon les lignes de forces, en plaques d'acier ou en textile (PVC ou Kevlar). Ces membranes doivent être précontraintes pour être stables.

## 1.2 EQUILIBRE DE DEUX CORDES

Deux cordes antagonistes, situées dans deux plans perpendiculaires s'équilibrent, si les résultantes des forces appliquées sur chaque brin sont égales. L'ensemble présente une rigidité structurelle qui varie avec l'angle de chaque corde dans son plan. Lorsqu'on charge cette structure, la corde inférieure se détend et la corde supérieure se tend.



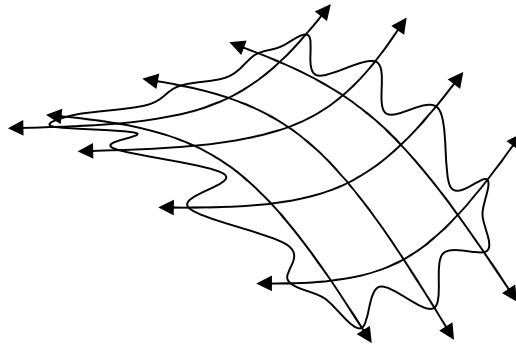
*Equilibre de deux cordes*



*Equilibre de membrane*

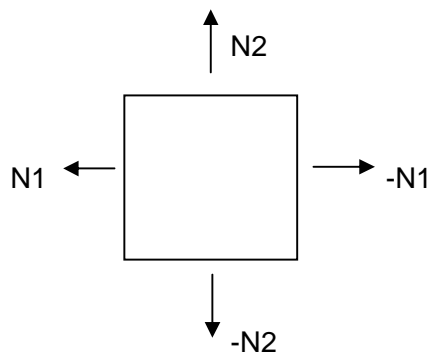
### 1.3 EQUILIBRE DE MEMBRANE

On peut imaginer qu'une membrane est un réseau de cordes parallèles et perpendiculaires tendues. Au lieu de former des angles, le grand nombre de point de croisement fait que la membrane présente deux courbures, qui, pour que la structure soit stable, doivent être inverses.

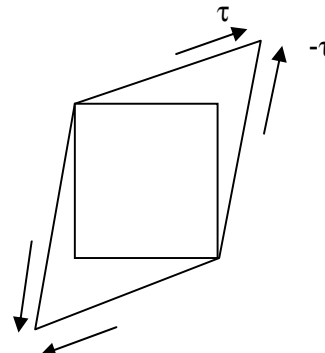


*Equilibre d'un grand nombre de corde*

L'état de contrainte dans la membrane peut être représenté par de la traction pure ou compression pure (contraintes principales), ou des contraintes combinées de traction (ou compression) et cisaillement simultané. Le cisaillement déforme la membrane suivant le biais.



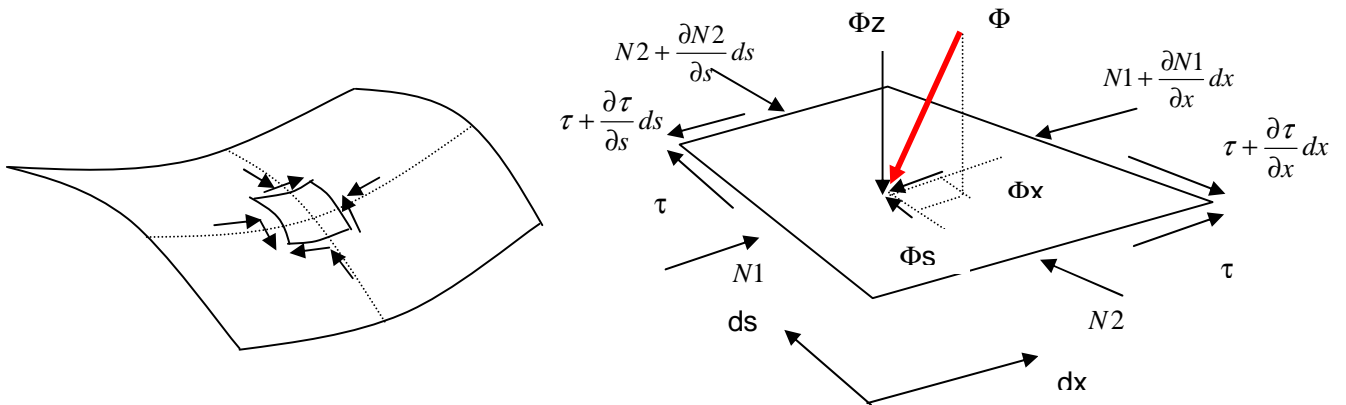
*Traction pure (ou compression pure)*



*cisaillement*

Si les courbures sont de même signe, la membrane ne présente pas de rigidité propre.

L'équilibre de membrane ne fait intervenir que des tractions, des compressions et des cisaillements pour équilibrer la charge appliquée. Il n'y a aucune flexion.



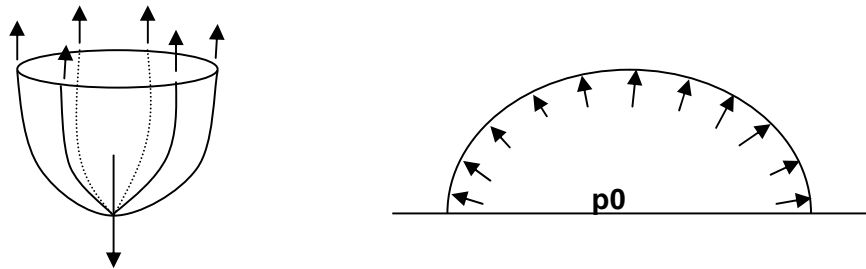
Equilibre d'un petit élément de membrane

Dans une toile, il n'y a aucune compression, contrairement aux coques. La compression est annulée soit par une précontrainte de la membrane obtenue par mise en tension des lisières, soit par une pression ou une dépression intérieure.

La forme idéale est la surface minimale, c'est à dire celle qui mobilise l'énergie de déformation minimale. On peut la trouver par analogie avec des films de savon établis sur des supports rigides.

Les surfaces à simple courbure (cylindres, cônes) peuvent être stables par leur poids qui leur donne une rigidité structurelle.

Les surfaces à double courbure, et dont les courbures sont de même signe (sphère), ne sont stables que si leur poids est suffisant ou si une pression interne les maintient en tension.



Les surfaces à double courbure inversée (paraboloïde hyperbolique) sont naturellement stables, si leur tension initiale ne s'annule pas sous l'effet des charges appliquées.

La théorie de membrane permet l'évaluation des tensions par les seules lois de la statique. Les valeurs ainsi obtenues sont indépendantes des déformations.

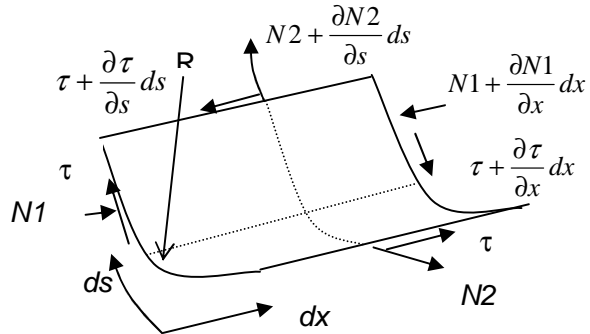
### 1.3.1 Equilibre de surfaces cylindriques

Dans la direction x, le rayon de courbure est infini (courbure nulle). Les équations d'équilibre deviennent :

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial s} = \Phi_x$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial s} = \Phi_t$$

$$\frac{N_2}{R} = \Phi_n$$



Dans cette catégorie, on peut également classer les ponts rubans c'est à dire les ponts ou passerelles réalisés à partir de câbles tendus entre les culées.

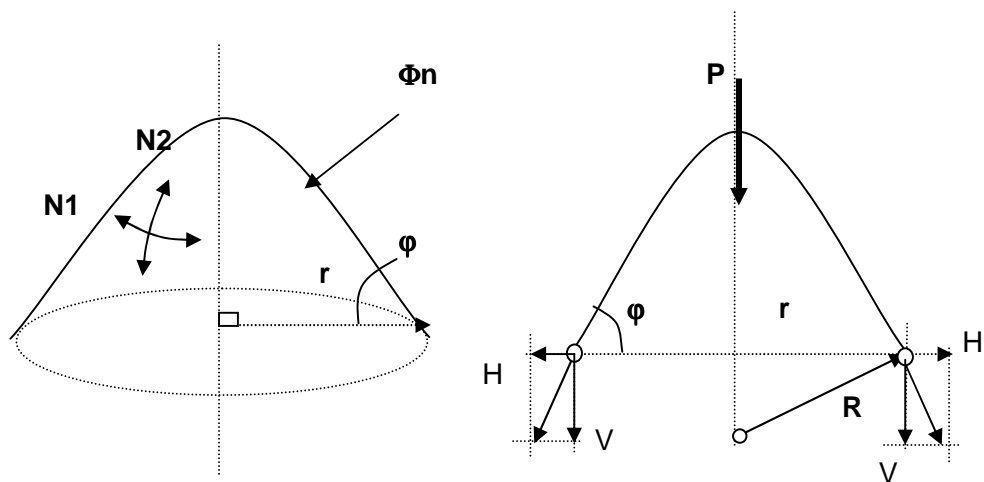
Outre le projet de Dykerhoff et Wydmann pour le pont sur le Bosphore conçu en 1958, mais jamais réalisé, certaines passerelles pour piétons ont été réalisées aux Etats-Unis (passerelle sur la rivière Sacramento en Californie : portée de 127 m - épaisseur : 38 cm), au Japon, en Suisse et en Allemagne sur ce principe

La stabilité verticale est donnée par le poids et la stabilité horizontale par la rigidité du béton qui permettent de lutter contre les soulèvements et les balancements dus au vent.

### 1.3.2 Equilibre de surfaces de révolution soumise à un système de charge de révolution

Les tensions de membranes équilibrent les forces réparties appliquées perpendiculairement à la surface :

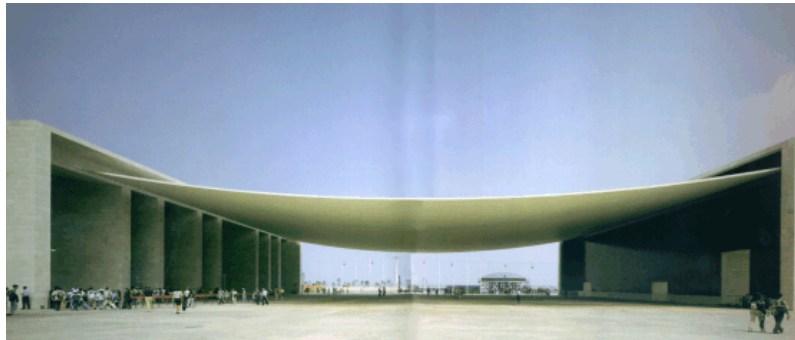
$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = \Phi_n$$



La tension le long des méridiens est obtenue en écrivant directement l'équilibre des forces le long d'un parallèle. Les forces appliquées sur la partie supérieure sont équilibrées par les composantes verticales des tensions appliquées le long d'un parallèle.

$$N_2 = -\frac{P}{2\pi r \sin \varphi}$$

**Exemple du pavillon de Lisbonne d'Alvaro Siza :**



Le pavillon de Lisbonne

Il s'agit d'une couverture tendue constituée d'un voile de béton porté par des câbles de précontrainte. L'ensemble constitue une membrane tendue cylindrique. La portée est de 68 m, et la flèche de la courbe est voisine de 3,00 m. On veut trouver la puissance des câbles et l'épaisseur de béton nécessaire.

La membrane est cylindrique. Elle est soumise à des charges verticales descendantes (poids propre, neige) et des charges verticales ascendantes (vent). Elle est régulièrement suspendue le long des génératrices de rive : les cisaillements sont donc nuls sous les cas de charge uniformes et symétriques.

La charge de neige extrême est prise égale à 60 kg/m<sup>2</sup>

La charge de vent extrême est prise égale à 175 kg/m<sup>2</sup>

La traction maximale dans les câbles est donnée par :

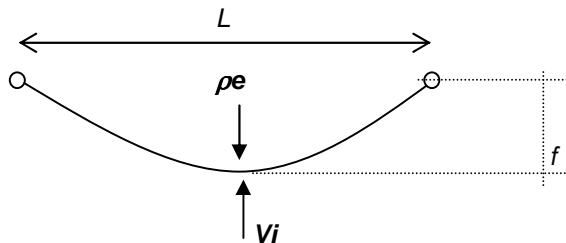
Poids propre + neige = traction maximale

L'épaisseur minimale de béton est déterminée pour que la membrane ne se soulève jamais sous un vent extrême.

Poids propre - vent > 0

$$\rho e \geq 175 \text{ kg / m}^2$$

$$e \geq \frac{175}{2500} = 0.07 \text{ m}$$



L'épaisseur de béton doit permettre de respecter le parfait enrobage des câbles de précontrainte.

$$e \geq 3\Phi$$

$\Phi$  = diamètre de la gaine

Si on utilise des câbles toronnés dont la gaine de protection à un diamètre de 7 cm environ, l'épaisseur ne peut être inférieure à 20 cm. Le poids au mètre carré est alors de 500 kg/m<sup>2</sup>. Il est supérieur à la sous pression due au vent.

La tension des câbles est, en première approche, considérée comme constante (câble surbaissé).

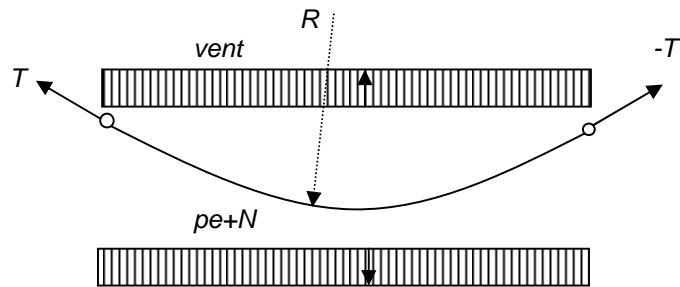
$$T = (\rho e + N)R$$

$$T = 560 \times R$$

$$R = \frac{L^2}{8f}$$

$$R = \frac{68^2}{8 \times 3} = 192.67m$$

$$T = 107895 \text{ kgf}$$

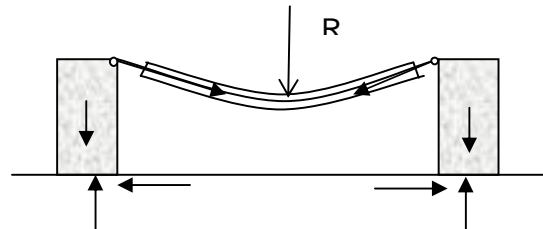


En utilisant des câbles constitués de 7 torons T15 « super » de force utile (0.45 Fr<sub>g</sub>) unitaire voisine de 12.5 tonnes par toron, on disposera un câble 7xT15 tous les 0.80 mètres. Ces câbles sont ancrés dans les bâtiments latéraux qui jouent le rôle de culées.

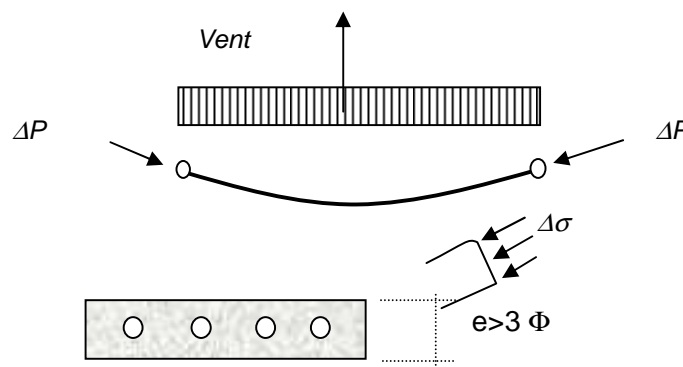
Les câbles sont adhérents au béton de la couverture. Lorsque le vent soulève la couverture, la tension des câbles est partiellement transférée au béton ( le câble se détend, et son raccourcissement est gêné par le béton) et la variation de contrainte de compression du béton vaut :

$$\Delta\sigma = \frac{VR}{e}$$

$$\Delta\sigma = \frac{175 \times 192.67}{20 \times 100} = 17 \text{ kgf/cm}^2$$



Cette variation de contrainte est très faible, et très inférieure à la résistance du béton en compression.





## 2 LES STRUCTURES TEXTILES

Les membranes textiles sont très anciennes, car le Colisée, à Rome (80 av. JC), était sans doute couvert par un vélarium. Un grand nombre de projets ont été développés par Frei Otto (professeur à Yale, Berkeley et Stuttgart).

Les membranes textiles sont les plus répandues. Les textiles les plus performants sont réalisés à base de Kevlar, et les plus courants sont en PVC. Le plan de coupe, généralement réalisé par ordinateur, dépend des dimensions de la structure lorsqu'elle est précontrainte. Il est donc déduit directement du calcul de la structure déformée. L'étude de la forme est conduite pour réduire les compressions et permettre leur reprise par la précontrainte de la structure.

Ces structures sont mises en place sur des câbles de bordure, eux-mêmes reliés à des structures métalliques. Les câbles sont généralement en acier inoxydable ou en acier galvanisé (selon le budget). Il en est de même pour les pièces d'ancrage et de réglage : platines, ridoirs, visserie ou rivets. Un soin extrême doit être apporté dans le dessin des liaisons, avec les câbles et les charpentes pour réduire les concentrations d'efforts, et éviter une usure prématurée sur les charpentes.

La résistance d'une toile PVC est d'environ 750 à 800 kg pour 5 cm. Elle est de 3000 kg pour 5 cm pour une toile en Kevlar. Il est donc nécessaire de prévoir des courbures prononcées lors de l'établissement du projet. Les rayons de courbure courants sont compris entre 5 à 8 m afin de limiter les tensions dans la toile. Le plan de coupe doit tenir compte des allongements de la toile sous la précontrainte.

Le tracé d'ensemble des surfaces doit être soigneusement étudié pour éviter la formation de poches d'eau.

Le problème principal des structures textiles reste tout de même leur durabilité

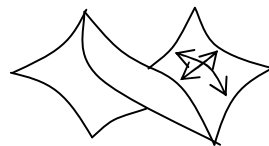
### Classement des structures textiles :

On peut classer ces structures en 5 catégories :

- 1- Libres ou simples
- 2- Câbles de vallée
- 3- Arceaux rigides ou bordures rigides
- 4- Supports rigides ou point haut (mâts)
- 5- Structures gonflables



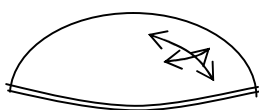
1



2



3



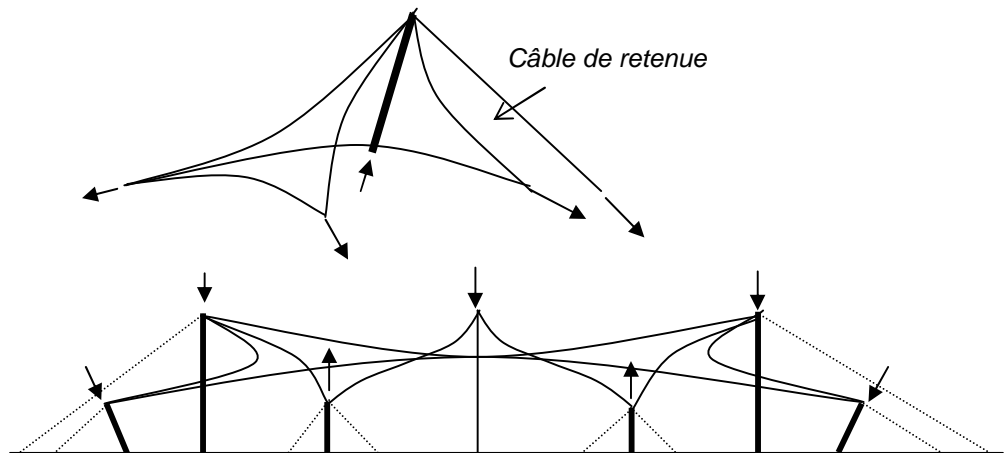
5



4

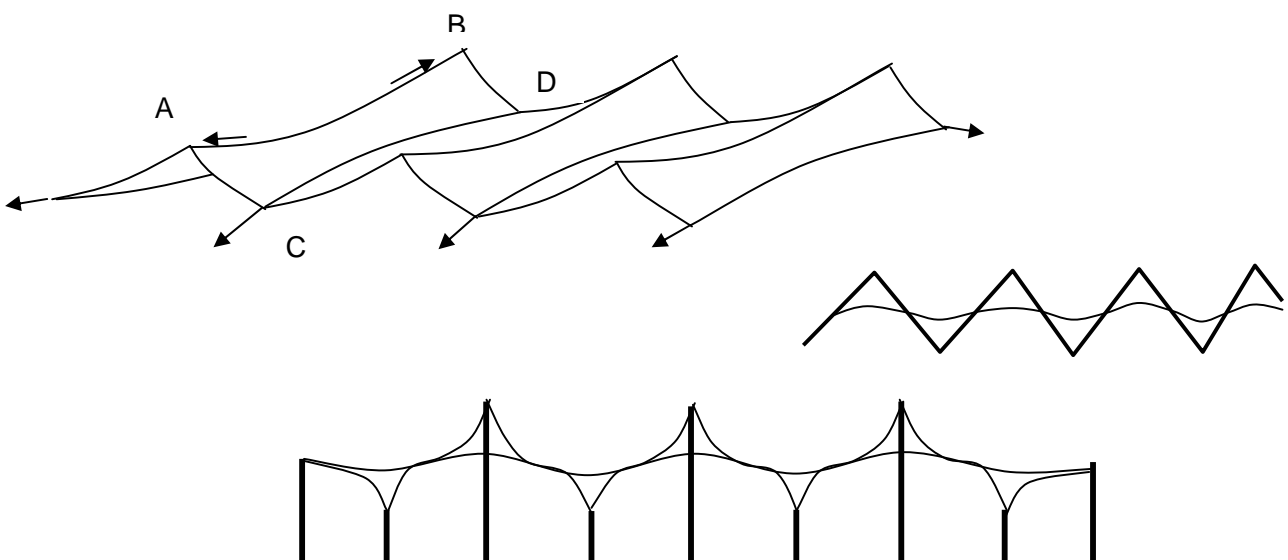
## 2.1 LIBRES OU SIMPLES

Elles sont soit simplement suspendues et ancrées sur des points fixes, soit précontraintes par des câbles de lisière ancrés dans le sol.

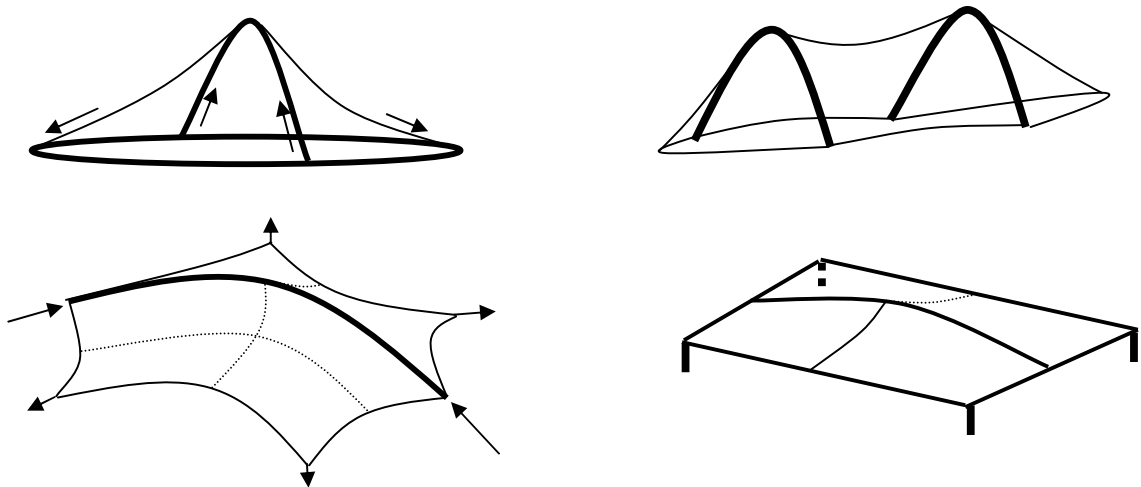


## 2.2 CABLES DE VALLEE

Les points bas sont obtenus par mise en tension d'un câble de vallée, qui permet de créer une noue. La répétition d'une surface élémentaire permet de créer des vagues successives parallèles ou radiales. La toile est fortement précontrainte par les câbles mis en place sur les arêtes (AB) et les noues (CD). Les rives sont tenues par des poutres ou des points hauts et bas.



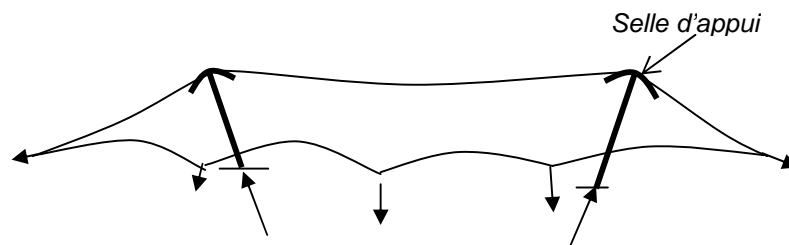
### 2.3 ARCEAUX RIGIDES OU BORDURES RIGIDES



Les surfaces sont tendues en faitage et en rive sur des poutres rectilignes ou des arceaux rigides non coplanaires qui permettent de donner la forme de la toile. Ces poutres de rives peuvent être fléchies ou simplement comprimées. Elles sont souvent réalisées en treillis pour résister aux flexions importantes engendrées par la traction de la toile. Les rives peuvent aussi être constituées de câbles de lisières.

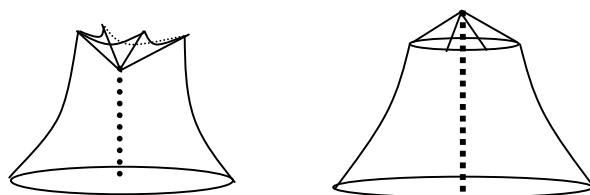
### 2.4 SUPPORTS RIGIDES OU POINT HAUT (MATS)

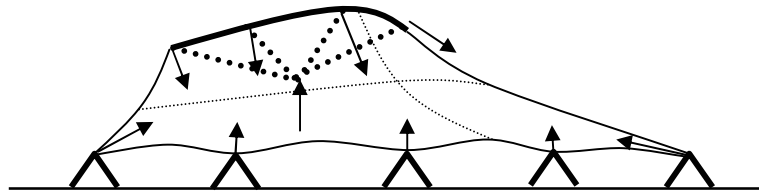
Les points hauts sont donnés par des selles d'appui. La toile est tendue en rive sur des câbles de lisière.



### 2.5 SURFACES DE REVOLUTION

Elles sont supportées soit par un mât (axe), soit par des arceaux : les formes obtenues sont des hyperboloïdes de révolution, complets ou partiels.

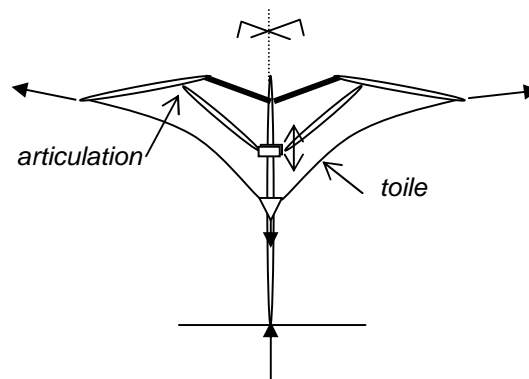




Portion de cylindre dont la génératrice est une hyperbole

## 2.6 PARAPLUIES

Ces toiles sont montées sur des ossatures rayonnantes, simples ou articulées. La stabilité horizontale est donnée par la répétition des formes ou l'accroche sur des parois en rive.



## 2.7 CARACTERISTIQUES DES TEXTILES PVC

Le type correspond au grammage du tissu. CH et TR signifient dans le sens de la trame et de la chaîne.

type	Résistance moyenne kN/5cm		Grammage >g/m <sup>2</sup>	Adhérence kN/5cm	Largeur de soudure >cm	Tenue des soudures à 65°C kN/5cm		Réaction au feu
	CH	TR				CH	TR	
1	CH	3.0	720	0.1	3	CH	2.6	M2
	TR	3.0				TR	2.6	
2	CH	4.2	1000	0.12	4	CH	3.3	M2
	TR	4.0				TR	3.3	
3	CH	5.5	1200	0.12	5	CH	3.6	M2
	TR	5.2				TR	3.6	
4	CH	5.0	1400	0.12	6	CH	4.5	M2
	TR	6.5				TR	4.5	
5	CH	8.0	2000	0.12	8	CH	5	M2
	TR	8.5				TR	5	

Coefficient de sécurité : Il est pris égale à 4 en pleine toile et 5 dans les zones de couture ou de soudure

Rayons maximaux : ils sont obligatoirement inférieurs à 70 m et couramment compris entre 5 et 15 m

Pente minimale : elle est de 20% pour assurer un bon écoulement des eaux de pluie

Rayon des câbles de bordure : ces rayons ne doivent pas être supérieurs à 25 m

### Cas de charge :

Poids propre + neige + précontrainte

Poids propre + vent + précontrainte

Le cas de rupture d'un élément de toile doit être examiné si la toile participe à la stabilité d'ensemble de la construction.

### **Exemple du Stade de Toulouse (P Ferret, F Cardete et G Huet - architectes – Setec T.P.I. structures) :**



Le Stadium de Toulouse

*Il s'agit d'une couverture en toile tendue, montée sur des arceaux parallèles espacés de 12 m, et prenant appui sur des consoles métalliques de 36 m.*

*Pour que la structure soit stable tant au vent ( force dirigée vers le haut) qu'à la neige (force dirigée vers le bas) il faut que la surface ait des rayons de courbure de signe contraire (courbure de Gauss négative). La forme funiculaire proposée est un paraboloïde hyperbolique. On recherche les rayons de courbure à mettre en place.*

*La toile ne doit jamais se détendre. Elle doit donc recevoir une précontrainte telle que la contrainte de traction dans les fibres soit toujours positive. Par ailleurs, la toile est très déformable dans le sens du biais, et l'on peut considérer que les cisaillements sont nuls.*

*Poids propre + vent + précontrainte > 0 pour les arceaux dont la concavité est tournée vers le haut*

*... Poids propre + neige + précontrainte > 0 pour les arceaux dont la concavité est tournée vers le bas*

*Les courbures sont de signe contraire, et l'équation de membrane devient :*

$$\frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} = p(x)$$

*On suppose, en première approche, que la rigidité de la trame est identique à celle de la chaîne.*

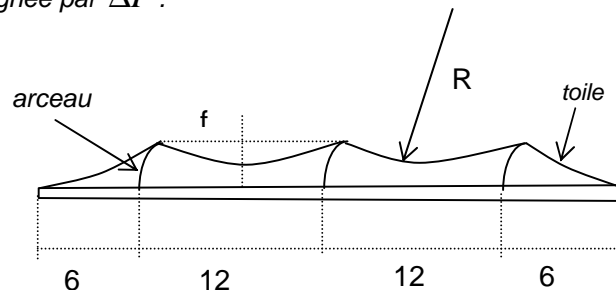
Le poids propre de la toile est de 2 kgf/m<sup>2</sup>. La charge de vent est prise égale à 175 kgf/m<sup>2</sup>, et est dirigée vers le haut. La précontrainte de la toile est désignée par  $\Delta P$ .

Arceau tendu N1 :

$$\left(-1 + \frac{175}{2} + \Delta P\right)R = T_{\max} \leq \frac{Tr}{s}$$

Arceau comprimé N2 :

$$\left(1 - \frac{175}{2} + \Delta P\right)R = T_{\min} \geq 0$$



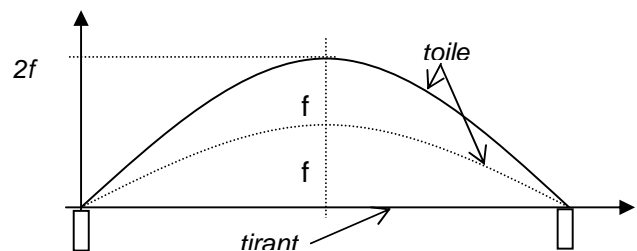
Le coefficient de sécurité sur les soudures ou coutures est pris égale à 5.

$$\Delta P \geq \frac{175}{2} - 1 = 86.8 \text{ kgf/m}$$

$$T_{\max} = (86.8 + 87.5 - 1)R = 173.3 \times R \text{ kgf/m}$$

$$Tr \geq 5 \times 173.3 \times R = 866.5 \text{ kgf/m}$$

$$\frac{Tr}{20} \geq 43.3 \times R \text{ kgf/5cm}$$

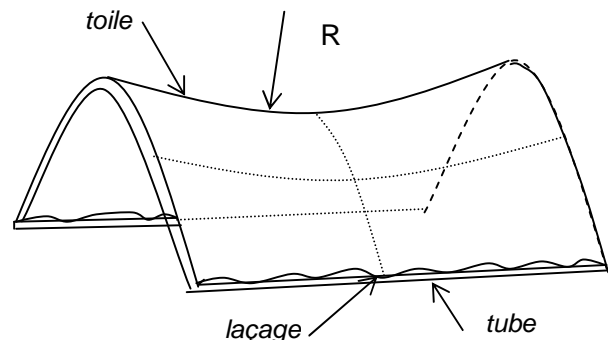


La toile est de type 5 (voir tableau des caractéristiques). Sa résistance est de 800 kgf pour 5 cm. Le rayon maximal est :

$$R_{\max} \leq \frac{800}{43.3} = 18.5 \text{ m} \text{ que l'on arrondit à } 18 \text{ m.}$$

**Tracé de la toile :**

$$y = \frac{x^2}{2R} = \frac{6^2}{2 \times 18} = 1.00 \text{ m}$$



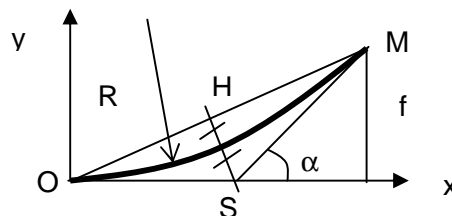
Au centre d'un panneau, la flèche minimale est de 1.00 m. En rive les arceaux auront une flèche de 2.00 m.

Par ailleurs, la pente de la toile ne doit jamais être inférieure à 20% en rive pour permettre l'écoulement de l'eau. La hauteur de l'arceau métallique devra donc être supérieure à :

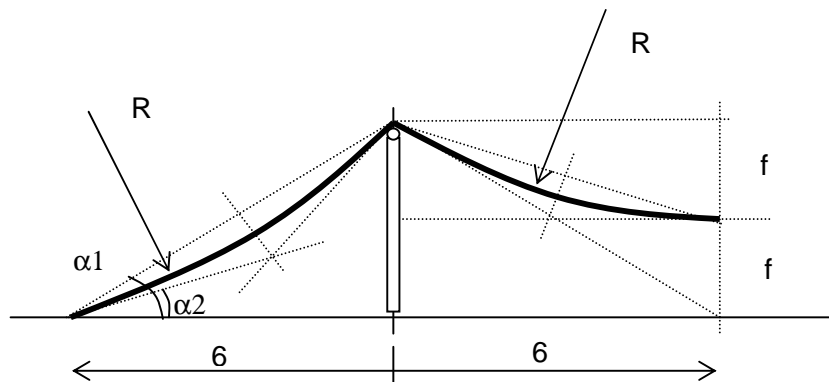
$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{x}{R} = \frac{3}{18} = 0.17$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0.17 + 0.2 = 0.37$$

$$H \geq 0.37 \times 6 \approx 2.20 \text{ m}$$



Ces valeurs sont augmentées de 10 % pour tenir compte de l'allongement de la toile sous charge, et éviter la formation de poches d'eau. On retiendra un arceau métallique de 2.40 m et une flèche des toiles de 1.2 m en travée. Les pentes initiales seront diminuées par l'allongement de la toile sous l'effet des charges de neige.

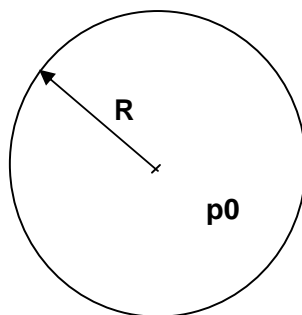


### 3 LES STRUCTURES GONFLABLES

Les structures gonflables sont apparues en 1917 en Angleterre. Leur développement a surtout été militaire au USA entre 1946 et 1954 pour constituer des abris pour radars. Walter Bird, un ingénieur en aéronautique, a établi les premiers standards pour dimensionner ces structures.

Plusieurs structures gonflables ont notamment été développées par Frei Otto et Bodo Rasch, s'inspirant des structures conçues pour les dirigeables dont ils étudièrent plusieurs projets : en 1970, l'équipe de Frei Otto, Kenzo Tange et Ove Arup imaginèrent la « ville dans l'antarctique », bulle de 2 km recouvrant une ville et la protégeant de la rigueur du climat. Conçu également par Frei Otto, le pavillon des USA à l'exposition 1970 à Osaka fut réalisé par une membrane elliptique de 142 m x 83 m supportée par des câbles.

#### 3.1 EQUILIBRE D'UNE BULLE DE SAVON



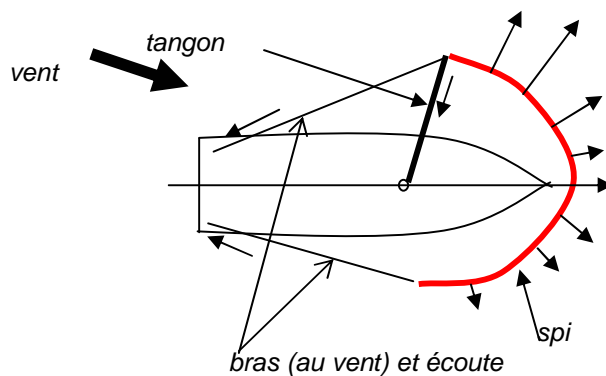
La tension dans la paroi de la bulle est donnée par la formule :

$$N = \frac{p_0 R}{2}$$

Les tensions sont égales dans toutes les directions. Elles équilibrent la pression interne. Si celle-ci est constante, la bulle est une sphère parfaite

### 3.2 EQUILIBRE DES ENVELOPPES SOUMISES A UNE PRESSION INTERNE

Le spinnaker, utilisé sur les bateaux de plaisance aux allures portantes, est un exemple de structure gonflable. Sa forme dépend de la coupe du tissu, du réglage des espars (hauteur et inclinaison du tangon, pièce métallique perpendiculaire au mât), et de la tension du bras et de l'écoute (cordes de retenue).



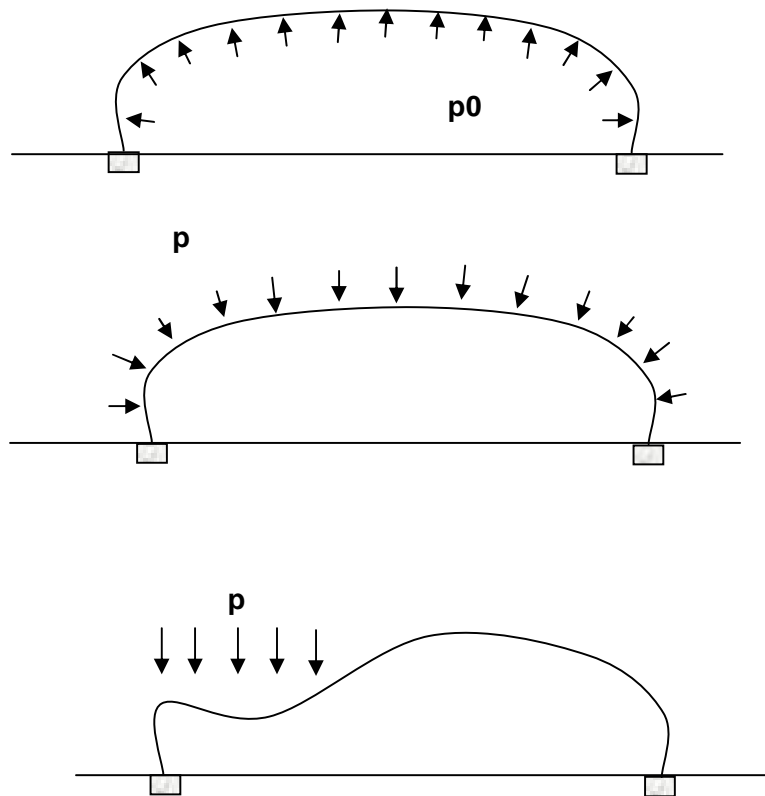
*plusieurs coupes de spinnaker (radiales ou à lés horizontaux)*

Les structures gonflables se prêtent à des coupes variées : les formes traditionnelles sont les demi sphères, les demi cylindres, les surfaces de révolution. La forme de base s'adapte aux pressions exercées (vent, neige partielle).

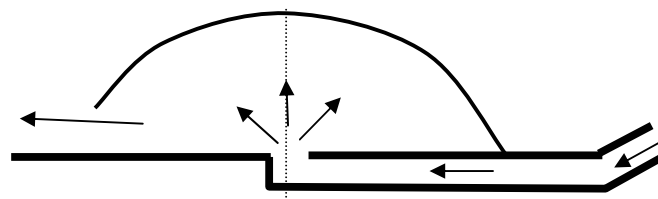
Les structures gonflables sont généralement constituées de toiles PVC. La pression de gonflage est voisine de 50% de la pression dynamique maximale exercée par le vent. La vitesse de vent prise en compte dans les calculs est voisine de 130 km/h.



Une enveloppe soumise à une pression interne  $p_0$  prend une forme d'équilibre qui correspond à la coupe du tissu. Elle peut ainsi résister à des charges uniformes inférieures ou égales à  $p_0$  en conservant sa forme d'équilibre.



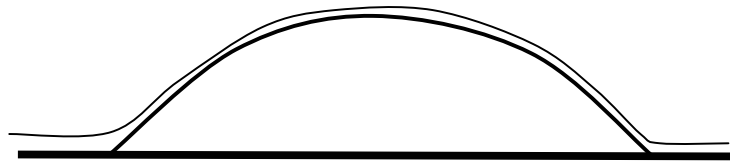
Si on charge cette enveloppe de façon dissymétrique ( $p < p_0$ ), elle trouve une nouvelle forme d'équilibre.



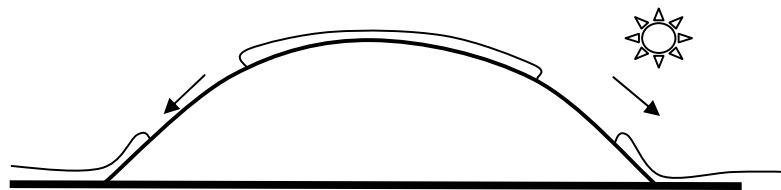
La pression interne est maintenue par un soufflage permanent permettant d'obtenir une surpression par rapport à la pression atmosphérique extérieure.

Des ancrages au sol, généralement réalisés en béton, sont nécessaires en rive de la toile pour empêcher le soulèvement de l'enveloppe.

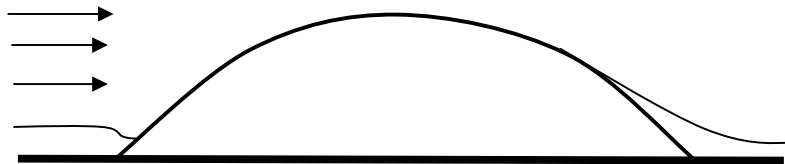
### 3.3 CHARGES APPLIQUEES SUR LES ENVELOPPES GONFLABLES



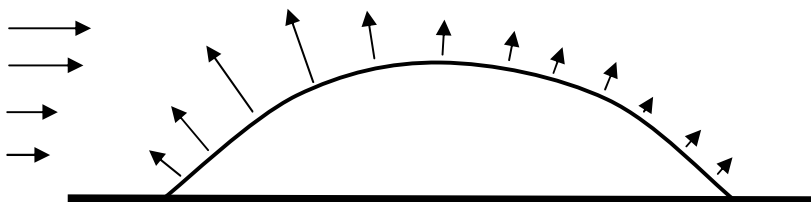
Le cas de neige uniforme est possible, mais rare, car il ne faut ni vent ni soleil.



En réalité dès que les conditions thermiques changent, le chargement devient inégal.



Le vent favorise l'effet de congère ou accumulation de neige sous le vent de la structure.



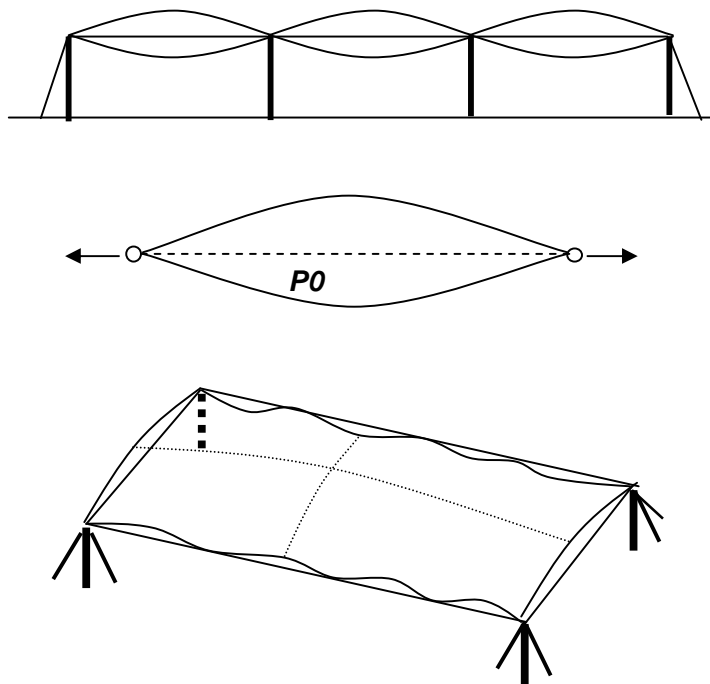
La dépression due au vent est plus forte dans le tiers avant. Cela est du à la variation de vitesse des filets d'air le long de l'enveloppe. Les molécules d'air situées loin de la surface ont une vitesse supérieure à celle situées contre la paroi, ce qui engendre une différence de pression tirant la membrane vers l'extérieur.



Structures gonflables à Pittsburgh- Frei Otto - (USA)

### 3.4 MEMBRANES DOUBLES OU STRUCTURES « COUSSINS »

La rigidité de la structure est assurée par la pression interne de l'enveloppe, qui l'empêche de fléchir. Des structures rigides sont nécessaires en rive, pour maintenir la forme de l'enveloppe, et assurer la stabilité d'ensemble.

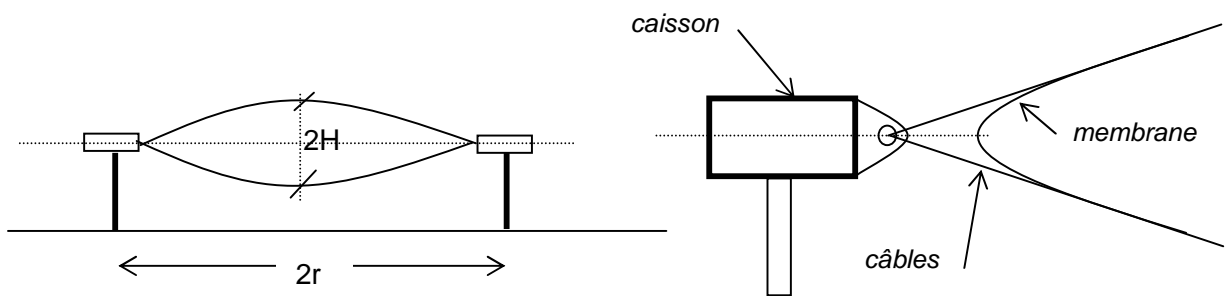


**exemple de couverture gonflable : couverture des arènes de Nîmes - Jörg Schlaich**



la couverture des arènes

Il s'agit d'une couverture gonflable, mise en place pour certains spectacles au-dessus des arènes. Cette couverture a la forme d'une lentille de 88 m x 57 m de diamètre et de 12 m d'épaisseur en son centre. Elle est stabilisée en rive par un anneau de compression en acier. Elle est gonflée à une pression interne  $p_0$  que l'on cherche à déterminer.



L'état de contrainte dans cette structure est donc représenté :

Par une pression constante de l'air :  $p_0$

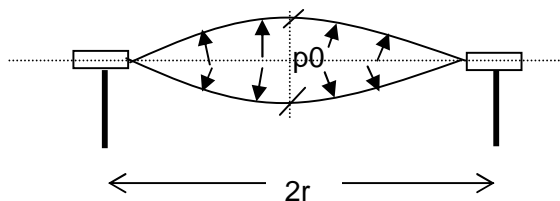
Par une traction constante de la membrane de révolution :  $N_1$  ou  $N_2$  selon la direction de l'effort

Cette couverture doit résister :

A son poids propre : toile, air

A la neige, action descendante, verticale égale à 60 kg/m<sup>2</sup>

Au vent, action verticale ascendante que l'on prendra en première approche égale à 175 kg/m<sup>2</sup>



L'équation des membranes s'écrit :

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = p_0$$

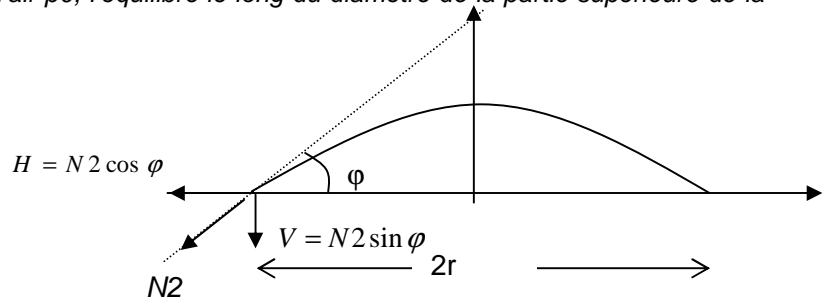
Sous l'action de la pression interne de l'air  $p_0$ , l'équilibre le long du diamètre de la partie supérieure de la membrane donne :

$$R_1 = R_2 = R$$

$$\sin \varphi = \frac{r}{R}$$

$$N_2 = -\frac{P}{2\pi r \sin \varphi} = \frac{\pi r^2 p_0 R}{2\pi r^2} = \frac{p_0 R}{2}$$

$$\text{D'où } N_1 = \frac{p_0 R}{2}$$



Les tensions sont donc identiques dans les deux directions (méridiens et parallèles).

Par ailleurs en considérant, en première approche, cette membrane comme une plaque circulaire de diamètre  $2r$  soumise à une charge uniforme, le moment de flexion au centre par mètre est égal à :

$$M = \frac{pr^2}{16}(3 + \nu)$$

Où  $\nu$  est le coefficient de Poisson de la toile soit 0.3 (chaîne/trame) à 0.5 (trame/chaîne).

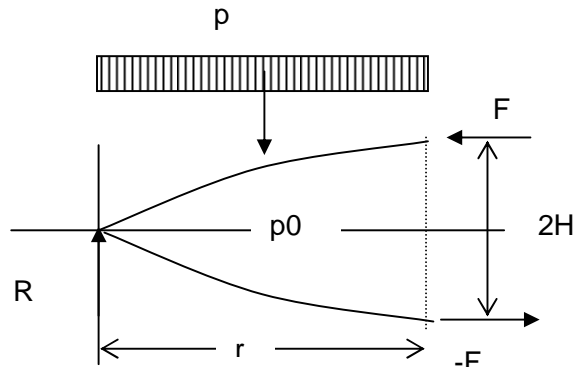
Ce moment équivaut (règle de la coupure) à deux forces égales et opposées  $-F$  et  $F$  par unité de longueur et distantes de  $2H = 12 \text{ m}$  :

$$F = \pm \frac{M}{2H} = \pm \frac{pr^2}{32H}(3 + \nu)$$

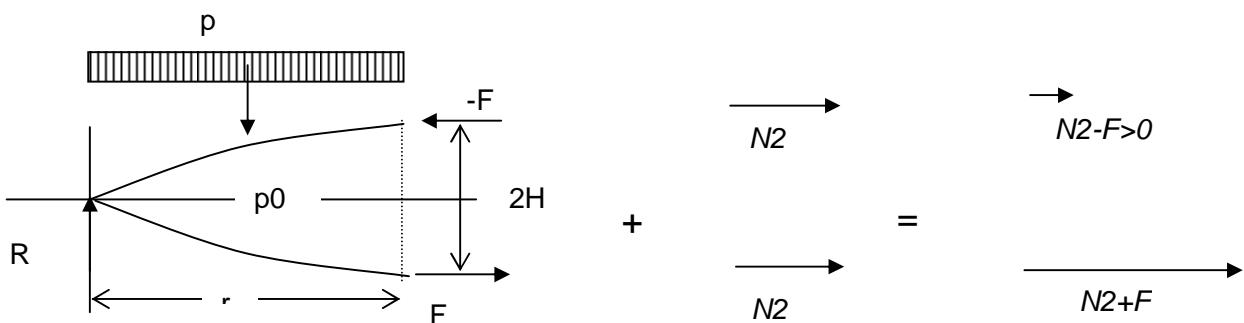
$$H = \frac{r^2}{2R}$$

$$F = \pm \frac{R}{r^2} \frac{pr^2}{16}(3 + \nu)$$

$$F = \pm \frac{pR}{16}(3 + \nu)$$



Pour que le tissu ne se détende jamais, il faut appliquer une précontrainte (c'est à dire une tension permanente) supérieure à la compression maximale, c'est à dire  $F$ . On en déduit la pression minimale de gonflage  $p_0$  :



$$F = N_1 = N_2 = \frac{PoR}{2} = \frac{pR}{16}(3+v)$$

$$po = \frac{p}{8}(3+v) \approx 0.41p$$

Cette pression est voisine de la moitié de la pression du vent appliquée sur la toile.

On en déduit alors la résistance à rupture minimale de la toile :

$$Tr = N_2 + F = 2N_2 = poR = \frac{PR(3+v)}{8}$$

avec

$$R = \frac{r^2}{2H}$$

En supposant une charge ascendante de vent de 175 kgf/m<sup>2</sup>, on obtient une pression de gonflage égale à 71.75 kgf/m<sup>2</sup> que l'on arrondit à 75 kgf/m<sup>2</sup> (750 Pascals ou 7.5 cm d'eau). Il s'agit de l'écart de pression par rapport à la pression atmosphérique.

La couverture est en réalité elliptique :

Grand axe : 2a = 88 m

Petit axe : 2b = 57 m

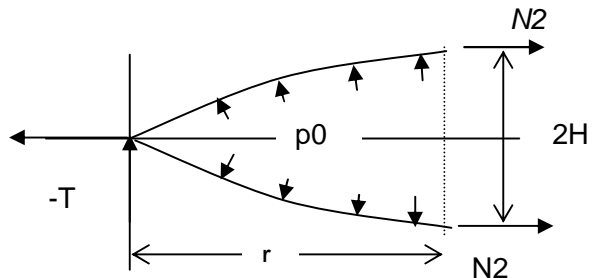
On l'assimile à un cercle  $2r = \sqrt{88 \times 57} = 70.82$  m

$$R = \frac{35.4^2}{2 \times 6} = 104.43 \text{ m}$$

$$T = 2N_2 = 75 \times 104.43 = 7832.25 \text{ kgf/m}$$

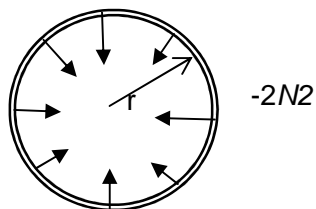
$$T = \frac{7832}{20} = 392 \text{ kgf/5cm}$$

$$T_R \geq 5 \times 392 = 1960 \text{ kgf/5cm}$$



Il faudra utiliser soit une toile en Kevlar, soit une toile PVC renforcée par des câbles en acier, ce qui est la solution retenue par Jörg Schlaich.

En périphérie, un anneau de compression est nécessaire pour conserver la forme de la toile et équilibrer les tractions de membrane. La traction à l'ancrage est égale à  $F = po \times r$  ce qui donne une compression uniforme dans l'anneau de  $po \times r^2$  soit 94 tonnes. Cet anneau est constitué par un caisson en acier.



Cette couverture légère ne pèse que 40 tonnes.



*les arènes de Nîmes*

#### **4 LES DEVELOPPEMENTS D'AVENIR**

Les structures tendues sont généralement des structures économiques en matière, mais coûteuses, car leur technologie est complexe, les matériaux sont sophistiqués, les études sont délicates, et les phases de construction demandent un soin extrême, car la stabilité n'est généralement obtenue que lorsque la structure est achevée.

Elles sont pourtant une voie d'avenir dans le domaine des grandes portées, car les structures classiques, handicapées par leur poids, ne deviennent plus réalisables. Elles présentent également un fort potentiel esthétique. Les performances des matériaux progressent toujours, tant en résistance (bétons de fibre, toiles en Kevlar), qu'en durabilité. Les technologies associées permettent également de fiabiliser le développement de structures gonflables, utilisables soit comme structures temporaires ou saisonnières, soit comme coffrages de coques en béton.